DEPENDABLE SYSTEMS AND SOFTWARE
Fachrichtung 6.2 — Informatik
Prof. Dr.-Ing. Holger Hermanns
Dipl.-Inform. Lijun Zhang

Übungsblatt 12 (Programmierung I)

Lesen Sie im Skript: Kapitel 11 & 18

Aufgabe 12.1 Geben Sie die Laufzeit und die Rekursionsfolge der Prozedur @ aus Abschnitt 8.1.1 im Skript für das Argument $([1, 2],\ [3, 4, 5, 6])$ an.

Aufgabe 12.2 Geben Sie für die folgende Prozedur eine Größenfunktion und eine entsprechende Laufzeitfunktion an:

$$\begin{aligned}
&\mathit{revi} \colon \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)\\
&\mathit{revi}(\mathit{xs},\ \mathit{nil}) = \mathit{xs}\\
&\mathit{revi}(\mathit{xs},\ y :: \mathit{yr}) = \mathit{revi}(y :: \mathit{xs},\ \mathit{yr})
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.3 Geben Sie für die folgende Prozedur eine Größenfunktion und eine entsprechende Laufzeitfunktion an:

$$\begin{aligned}
&\mathit{fac} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\
&\mathit{fac}\ n = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } n \cdot \mathit{fac}(n-1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.4 Geben Sie die Laufzeitfunktion der folgenden Prozedur an:

$$\begin{aligned}
&\mathit{size} : \mathbb{N} \times \mathcal{L}(\mathcal{T}(X)) \to \mathbb{N}\\
&\mathit{size}(a,\ \mathit{nil}) = a\\
&\mathit{size}(a,\ (x,\ \mathit{nil}) :: \mathit{ts}) = \mathit{size}(a+1,\ \mathit{ts})\\
&\mathit{size}(a,\ (x,\ t :: \mathit{tr}) :: \mathit{ts}) = \mathit{size}(a,\ t :: (x, \mathit{tr}) :: \mathit{ts})
\end{aligned}$$

Legen Sie dabei $\lambda\,(a, [t_1, \dots, t_n]).\ 2(0 + s\,t_1 + \cdots + s\,t_n) - n$ als Größenfunktion zugrunde.

Aufgabe 12.5 Geben Sie eine baumrekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, derer Komplexität konstant ist. Hinweis: Formulieren Sie die Prozedur so, dass sie ab einer bestimmten Argumentgröße nicht mehr rekurriert. Das Beispiel zeigt, dass man pathologische Prozeduren konstanter Komplexität konstruieren kann, die für alle praktisch relevanten Argumente sehr hohe Laufzeiten haben.

Aufgabe 12.6 Wir betrachten die aus vorherigen Übungsaufgaben bekannte Prozedur zur Berechnung natürlicher Quadratwurzeln:

$$\begin{aligned}&p\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}\\ &p(n, x) = \text{ if } n^2 \leq x \text{ then } p(n+1,\, x) \text{ else } n-1\end{aligned}$$

a) Geben Sie die Laufzeit von p für ein Argument (n, x) an.
b) Geben Sie die Laufzeitfunktion der Prozedur p gemäß der Größenfunktion $\lambda\,(n, x)\textbf{.}$ if $n^2 > x$ then 0 else $x - n^2 + 1$ an.
c) Geben Sie die Komplexität der Laufzeitfunktion an.

Aufgabe 12.7 Geben Sie die Laufzeitfunktion für die Prozedur @ und die Größenfunktion $\lambda\,(xs, ys)\textbf{.}\ 3|xs| + 7$ an.

Aufgabe 12.8 Geben Sie die Laufzeitfunktion für die Prozedur @ und die Größenfunktion $\lambda\,(xs, ys)\textbf{.}\ 2^{|xs|}$ an.

Aufgabe 12.9 Geben Sie möglichst einfache Prozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ an, die die Komplexitäten $O(1)$, $O(n)$, $O(n^2)$ und $O(n^3)$ haben. Sie können Hilfsprozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ verwenden.

Aufgabe 12.10 Geben Sie für jede der folgenden Funktionen $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine möglichst einfache Funktion g mit $O(f) = O(g)$ an. Im Gegensatz zu f soll g nicht rekursiv definiert sein.

a) $f(n) = \text{if } n < 3 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-2) + 5$
b) $f(n) = \text{if } n < 30 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-6) + 3n + 7n^2$
c) $f(n) = \text{if } n < 27 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-7) + 3n^7 + 7n^3$

Aufgabe 12.11 Geben Sie möglichst einfache Prozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ mit den Komplexitäten $O(2^n)$ und $O(3^n)$ an.

Aufgabe 12.12 Geben Sie möglichst einfache Prozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ mit den Komplexitäten $O(\log n)$ und $O(n \log n)$ an. Sie können Hilfsprozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ verwenden.

Aufgabe 12.13 Geben Sie für jede der folgenden Funktionen $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine möglichst einfache Funktion g mit $O(g) = O(f)$ an. Dabei soll g im Gegensatz zu f nicht rekursiv definiert sein.

a) $f(n) = \text{if } n < 7 \text{ then } 0 \text{ else } 3\,f(n-1) + n \log n + 5$
b) $f(n) = \text{if } n < 4 \text{ then } 0 \text{ else } f(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + 13$
c) $f(n) = \text{if } n < 2 \text{ then } 1 \text{ else } 2\,f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 3n + \log n + 5$

Aufgabe 12.14 Was ist der Unterschied zwischen einer ternären Relation $E \subseteq V \times M \times V$, einer Funktion $E \in V \times M \to V$, und einer Funktion $E \in V \times M \rightharpoonup V$? Geben Sie Beispiele, die den Unterschied deutlich machen.

Aufgabe 12.15 Zeichnen Sie die markierten Graphen (V, M, E) zu

- $V = \{A\}$, $M = \{a, b\}$, $E = \{(A, a, A), (A, b, A)\}$;
- $V = \mathbb{N}$, $M = \mathbb{N}$, $E = \{(n, (n \bmod 3), n + 3) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- $V = \{A, B, C\}$, $M = \{a, b, c\}$, $E = \{(A, a, B), (B, b, C), (B, c, C), (B, b, C)\}$.

Aufgabe 12.16 Sei $(G', v) = \mathit{Reach}(P)$. Zeigen Sie, dass G' zusammenhängend ist.

Aufgabe 12.17 Bestimmen Sie die Spuren der Prozesse in Abbildung 18.1, wobei jeweils der Knoten 0 der Anfangsknoten sei. Welche Prozesse sind spuräquivalent?