DEPENDABLE SYSTEMS AND SOFTWARE
Fachrichtung 6.2 — Informatik
Prof. Dr.-Ing. Holger Hermanns
Dipl.-Inform. Lijun Zhang

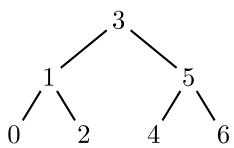
Übungsblatt 8 (Programmierung I)

Lesen Sie im Skript: Kapitel 7 und Kapitel 8.1-8.7

Aufgabe 8.1: (Präprojektion)
Schriben sie eine Prozedur $prep : \alpha\, ltr \to \alpha\, list$ die die Präprojektion eines markierten Baums liefert.

Aufgabe 8.2: (Postprojektion)
Schreiben Sie eine Prozedur $pop : \alpha\ ltr \to \alpha\ list$, die die Postprojektion eines markierten Baums liefert.

Aufgabe 8.3: (Inprojektion eines bin. Baumes)
Bei der Inprojektion eines binäen Baumes erscheinen die Marken der inneren Knoten jeweils nach den Marken des linken und vor den Marken des rechten Unterbaums: $inpro(L(x_1[t_1, t_2])) = inpro\ t_1@[x]@inpro\ t_2$. Beispielweise hat der Baum



die Inprojektion $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$. Schreiben Sie eine polymorphe Prozedur $inpro : \alpha\ ltr \to \alpha\ list$, die die Inprojektion eines binären Baumes liefert. Wenn die Prozedur auf einen Baum angewendet wird, der nicht binär ist, soll die Ausnahme *Subscript* geworfen werden.

Aufgabe 8.4: (Die Menge aller Mengen)
Welches Axiom besagt, dass es keine Menge x mit $x \in x$ gibt?
Warum folgt daraus, dass es keine Menge gibt, die alle Mengen enthält?

Aufgabe 8.5: (Konstituentenanzahl)
Gibt es eine Menge, die 4 Elemente und 3 Konstituenten hat? Gibt es eine infinitäre Menge, die nur endlich viele Konstituenten hat?

Aufgabe 8.6: (Echte Teilmengen)
Geben Sie eine Menge an, die genau drei echte Teilmengen hat.

Aufgabe 8.7: (Echte Obermenge)
Sei x eine Menge. Geben Sie eine echte Obermenge von x an.

Aufgabe 8.8: (Mengen)
Geben Sie eine dreielementige Menge wie folgt an:

i) Jede Konstituente der Menge ist ein Element der Menge.

ii) Jede nichtleere Konstituente der Menge ist eine einelementige Menge.

Stellen Sie diese Menge mit geschweiften Klammern $\{\dots\}$ und mit einem Baum dar. Können Sie auch eine vierelementige Menge mit diesen Eigenschaften angeben?

Aufgabe 8.9: (Gerichtete Bäume – dtree)
Schreiben Sie eine Prozedur $dtree : tree \to bool$, die testet, ob ein Baum gerichtet ist. Verwenden Sie die Vergleichsprozedur *compare* aus § 7.1.3.

Aufgabe 8.10: (Gerichtete Bäume)
Schreiben Sie eine Prozedur *normalize* : *tree* $\to$ *tree*, die zu einem Baum den eindeutig bestimmten gerichteten Baum liefert, der dieselbe Menge darstellt. Verwenden Sie die Vergleichsprozedur *compare* aus § 7.1.3 und die polymorphe Sortierprozedur aus Aufgabe 5.10 des Scriptes.

Aufgabe 8.11: (Natürliche Zahlen als Bäume)
Die natürlichen Zahlen können gemäß Abbildung 8.3 durch gerichtete Bäume dargestellt werden.

(a) Schreiben Sie eine Prozedur *code* : *int* $\to$ *tree*, die die Darstellung einer natürlichen Zahl liefert. Verwenden Sie die Prozedur *iter* aus § 3.9.

(b) Schreiben Sie eine Prozedur *nat* : *tree* $\to$ *bool*, die testet, ob ein gerichteter Baum eine natürliche Zahl darstellt.

(c) Schreiben Sie eine Prozedur *decode* : *tree* $\to$ *int*, die zu einem gerichteten Baum, der eine natürliche Zahl darstellt, die dargestellte Zahl liefert.

Aufgabe 8.12: (Mengendarstellung natürlicher Zahlen)
Die natürlichen Zahlen lassen sich auch durch die Mengen

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

darstellen. Diese Darstellung hat die Eigenschaft, dass jede Zahl n durch eine n-elementige Menge dargestellt wird, die zudem genau n Konstituenten hat. Auerdem gilt $m \leq n$ genau dann, wenn die Darstellung von m eine Teilmenge der Darstellung von n ist.
Schreiben Sie eine Prozedur *code* : *int* $\to$ *tree*, die zu einer natrlichen Zahl einen gerichteten Baum liefert, der die Zahl wie oben angegeben darstellt. Verwenden Sie die Prozedur *iter* aus § 3.9.

Aufgabe 8.13: (Mengenbildung)
Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an: $\mathbb{B} \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{B} \cup \mathbb{N}[4, 6]$, $\mathbb{N}[0, 4] - \mathbb{B}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}[1, 3])$

Aufgabe 8.14: (Mengen)
Sei $x = \langle \{1, 2\}, \langle\rangle, 0\rangle$. Geben Sie eine Baumdarstellung für x an, bei der Tupel als Mengen und Zahlen als Zahlen dargestellt sind.

Aufgabe 8.15: (Mengenbildung)
Geben Sie die Elemente der Menge $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{B}^2 \cap (\mathbb{B} + \mathbb{B})$ an.

Aufgabe 8.16: (Mengendarstellung geordneter Paare)
Geordnete Paare können auch gemäß $(x, y) \rightsquigarrow \{x, \{x, y\}\}$ dargestellt werden. Beweisen Sie die Korrektheit dieser Darstellung.

Aufgabe 8.17: (Gerichtete Bäume und Mengendarstellung von Paaren)
Ein Paar (x, y) aus zwei gerichteten Bäumen kann gemäß § 8.2 und $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ durch einen gerichteten Baum dargestellt werden.

(a) Schreiben Sie eine Prozedur *code* : *tree*$*$*tree* $\to$ *tree*, die zu zwei gerichteten Bäumen x und y den gerichteten Baum liefert, der das Paar (x, y) darstellt. Verwenden Sie die Vergleichsprozedur *compare* aus § 7.1.3.

(b) Schreiben Sie eine Prozedur *pair* : *tree* $\to$ *bool*, die testet, ob ein gerichteter Baum ein Paar darstellt.

(c) Schreiben Sie eine Prozedur *decode* : *tree* $\to$ *tree* $*$ *tree*, die zu einem gerichteten Baum, der ein Paar darstellt, das dargestellte Paar liefert.

Aufgabe 8.18: (Graphen)
Geben Sie Graphen wie folgt an:

(a) Einen Graphen der Größe 3 mit 3 Wurzeln.

(b) Einen Graphen der Größe 3 mit einer Quelle und zwei Senken.

(c) Einen zusammenhängenden Graphen der Größe 4 mit zwei Quellen und zwei Senken.

(d) Gibt es einen stark zusammenhängenden Graphen, der eine Quelle hat?

Aufgabe 8.19: (Graphen)
Seien zwei Graphen $G = (V, E)$ gegeben:

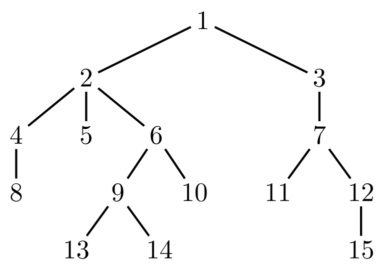
(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{(1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (6, 2), (6, 3)\}$

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad E = \{(2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (7, 5)\}$

Zeichnen Sie diese Graphen ohne überkreuzende Kanten. Beantworten Sie für jeden der Graphen die folgenden Fragen:

- Welche Größe und welche Tiefe hat der Graph?
- Welche Quellen, Senken und Wurzeln hat der Graph?
- Ist der Graph zyklisch? Wenn ja, geben Sie einen Zyklus an.
- Geben Sie einen einfachen Pfad maximaler Länge an.
- Geben Sie den vom Knoten 2 aus erreichbaren Teilgraphen an.
- Ist der Graph zusammenhängend? Stark zusammenhängend?

Aufgabe 8.20: (Graphen)
Sei der folgende baumartige Graph gegeben, wobei alle Kanten von oben nach unten gerichtet seien.



(a) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen an.

(b) Geben Sie die Größe und Tiefe des Graphen an.

(c) Geben Sie die Wurzel des Graphen an.

(d) Geben Sie die terminalen Knoten des Graphen an.

(e) Geben Sie für den Knoten 14 einen Pfad an, der von der Wurzel zu diesem Knoten führt. Gibt es mehrere solcher Pfade?

(f) Zeichnen Sie alle Teilgraphen, die den Knoten 7 als Wurzel haben.

(g) Geben Sie einen Teilgraphen an, der nicht baumartig ist.